Otro tipo de problemas hace referencia a que, en términos generales, las series reales, sobre todo en economía, estarán perturbadas por algún tipo de componente puramente aleatorios (errores de medida, etc.), que se reflejarán en una evolución temporal, en cierta medida irregular y aperiódica. Es decir, que incluso para ciclos regulares de bajo periodo, sólo en casos extremos, aquellos no sometidos a ninguna fuerza o perturbación exógena aleatoria, será posible encontrar comportamientos regulares de dinámica simple por la simple inspección visual de su evolución temporal.

Por otra parte, como una característica que debemos observar en la serie temporal si ésta procede de un sistema caótico determinista será una evolución errática y aperiódica, es decir, debe presentar una dinámica compleja. Esta complejidad dinámica podrá estar también generada por un sistema puramente aleatorio, o por un proceso donde se combinen estas dos fuentes de complejidad. El análisis gráfico de la evolución temporal, si bien puede revelar en ciertos casos, y siempre con algún componente de arbitrariedad, el carácter determinista de dinámica simple de la serie, es incapaz de mostrar cuál es la verdadera naturaleza o el origen de la irregularidad y aperiodicidad observada en la serie temporal, esto es, si procede de un sistema dinámico en régimen de comportamiento caótico, por algún proceso dinámico puramente aleatorio o por alguno donde se combinen comportamientos caóticos deterministas con otros puramente aleatorios.

Así, aunque el análisis gráfico de la serie temporal pueda considerarse el primer paso para la detección de comportamientos caóticos, será necesario profundizar en el análisis de la serie. Dos de las herramientas utilizadas tradicionalmente para completar el análisis gráfico es correlograma y el periodograma de la serie.

Análisis de las autocorrelaciones lineales en el dominio temporal: El correlograma.

El siguiente paso en el proceso de detección de comportamientos caóticos consiste en analizar si existe alguna dependencia temporal de retroalimentación en la evolución de la series, ya que precisamente, si la serie ha sido generada por un sistema dinámico determinista, por definición, su evolución temporal, el cambio en los valores que va tomando la serie, deberá estar regida por dicho sistema dinámico. La herramienta estadística que tradicionalmente se emplea para detectar la posible dependencia temporal en la estructura del proceso generador de la serie es el correlograma, compuesto por la estimación de la *función* de autocorrelación simple y la función de autocorrelación parcial.

La función de autocorrelación simple

El análisis del correlograma supone que la serie temporal constituye una realización de un proceso estocástico, esto es, de un proceso constituido por una sucesión de variables aleatorias $\{y_t\}$, $t = -\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

La función de autocorrelación simple (*facs*) de un proceso estocástico $\{y_t\}$ es una función real de los números naturales $r: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $k \in \mathbb{N}$, asigna un valor que denotaremos por $r_k(t)$ que será igual al coeficiente de correlación entre y_t e y_{t-k} :

$$r_k(t) = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)}\_\sqrt{Var(y_{t-k})}}$$

La estimación de la *facs* del proceso estocástico a partir de la serie temporal puede realizarse de la siguiente forma:

$$r_k = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t-\bar{y})(y_{t-k}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}\sqrt{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}}$$

Siendo T el tamaño de la serie temporal e $\bar{y}$ la media muestral:

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

La función de autocorrelación simple estimada a partir de una serie temporal, mide por tanto la correlación lineal media existente entre dos valores cuales quiera de la serie separados en el tiempo por un periodo determinado por el retardo k, esto es como las variaciones de la serie temporal están relacionados en el tiempo t y $t+k$.

La función de autocorrelación parcial

La función de autocorrelación parcial (*facp*) trata de recoger al igual que la *facs* la autocorrelación existente entre dos valores de la serie separados en el tiempo por cierto retardo k, pero eliminando o descontando el efecto de las auto-correlaciones existentes en periodos intermedios del tiempo.

La estimación de los coeficientes de autocorrelación parcial para el retardo $k \in N$ que denominaremos por ϕ_{kk} podrá obtenerse mediante la estimación por mínimos cuadrados ordinarios de la siguiente regresión lineal:

$$\tilde{y}_t = \varphi_k 1\, \tilde{y}_{t-1} + \varphi_k 2\, \tilde{y}_{t-2} + \_\_\_ + \varphi_{kk}\, \tilde{y}_{t-k} + e_t$$

donde $\tilde{y}_j$ representa el valor de la serie en j respecto a la media muestral ($\tilde{y}_j = y_j - \bar{y}$).

El correlograma

Las estimaciones de las funciones de correlación simple y parcial a partir de una serie temporal constituyen su correlograma. Nótese que el coeficiente estimado para la *facs* y la *facp* para el retardo k=0 será uno. Para el resto de retardos los coeficientes estimados estarán comprendidos en el intervalo [-1,1], con la única restricción de que $r_1 = \phi_{11}$.

En caso de que exista cierta estructura dinámica en el proceso estocástico esta quedará reflejada en los valores estimados en la *facs* y la *facp*, que serán significativamente distintos de cero- A efectos prácticos, los intervalos de significación se pueden establecer por las bandas de $\pm 2/\sqrt{T}$ -. Sólo en el caso en el que el proceso estocástico esté incorrelacionado en el tiempo, es decir, que los valores que va tomando la serie temporal no guarda ninguna relación dinámica de retroalimentación, los coeficientes estimados resultarán no-significativos.

De esta forma es posible utilizar el correlograma de la serie temporal para detectar una posible estructura dinámica en el proceso generador de la serie temporal, y si tenemos en cuenta que las series caóticas proceden de sistemas dinámicos deterministas, será necesario observar un corrleograma con coeficientes significativamente distintos de cero. En caso contrario, es decir, cuando el correlograma es plano, cabría esperar que el proceso generador es puramente estocástico y totalmente incorrelacionado. La existencia de estructura dinámica en el proceso generador de la serie, no revela sin embargo la naturaleza lineal, o no lineal del sistema dinámico subyacente, y por tanto si éste es caótico o no.

Por otra parte, la presencia de un correlograma plano tampoco resulta suficiente para asegurar que el proceso generador es uno puramente aleatorio e incorrelacionado. La explicación a este hecho *se encuentra en que* el correlograma sólo es capaz *de recoger las* autocorrelaciones de carácterácter lineal presentes en la serie, y los modelos caóticos presentan una estructura dinámica no-lineal, y por tanto puede que no quede reflejada en el correlograma. Es por ello, que con el propósito de recoger la posible dependencia no lineal presente en una serie, se haya propuesto en la literatura empírica analizar adicionalmente el correlograma del cuadrado de la serie temporal, ya que si no existe ningún tipo de autocorrelación en la serie original, tampoco la habrá en su cuadrado, mientras que esta transformación puede revelar la posible correlación no lineal presente en el proceso generador de la serie ya sea caótico determinista o puramente aleatorio pero no lineal (Bollerslev, 1988). Otra alternativa para afrontar este problema es usar otro tipo de herramientas estadísticas que posibiliten captar la posible estructura dinámica lineal o no lineal.

Análisis R/S y Exponente de Hurst

Tanto el correlograma como el periodograma constituyen las herramientas básicas del análisis estadístico de las series temporales bajo la hipótesis de linealidad. Es por ello que, en algunas series caóticas estos test no sean capaces de recoger la verdadera estructura dinámica no-lineal subyacente. Así, deberá compltarse el análisis del correlograma con otras herramientas para la detección de comportamientos aperiódicos y dependencia dinámica no-lineal. Una de esas herramientas es la estimación del exponente de Hurst a partir del análisis R/S.

El exponente de Hurst es una medida de la *predicibilidad* o *memoria* presente en una serie temporal que permite discriminar entre procesos generadores puramente estocásticos del tipo ruido blanco, frente *a otros procesos*, determinista*s* o estocásticos, *que generan ruidos coloreados* distintos al blanco -ruido negro y rosa-.

H.E. Hurst fue un hidrólogo inglés que dedicó gran parte de su vida a estudiar el río Nilo. Entre otras cuestiones, trató de determinar cuál debería ser la capacidad de depósito o de almacenamiento de agua apropiada para enfrentarse a las subidas y bajadas en el caudal del río. Su preocupación máxima era la de construir una presa que permitiese el abastecimiento de agua en todo momento, es decir, no sólo ante el caso de que sobreviniera un año seco sino también ante la posibilidad de que se sucedieran toda una serie de años secos seguidos. Es por ello que estaba interesado en saber si los incrementos del caudal de un año para otro eran independientes -más concretamente un ruido blanco-, o si por el contrario existía cierta persistencia o memoria temporal en las variaciones del caudal. En este último caso, para asegurarse el abastecimiento de agua, la capacidad de la presa debería ser mayor que si las variaciones de un año a otro fuesen independientes.

Así, Hurst (1951, 1955) estudio las subidas y bajadas del Nilo con un método de análisis de su propia invención para tratar de estimar la posible recurrencia en las variaciones de su caudal, que en palabras de Mandelbrot (1997, pp. 554) , podría haberse calificado de estrecho de miras y *ad-hoc*, pero que en realidad ha resultado eminentemente intrínseco, ya que está relacionado con las propiedades escalantes de los *movimientos Brownianos*

La estimación del exponente de Hurst se deriva del análisis R/S que pasamos a comentar a continuación. Antes de ello, queremos volver a señalar la importancia de la estimación del exponente para la detección de comportamientos caóticos a partir de una serie temporal, ya que este análisis supone una alternativa a la estimación de la función de correlación lineal para medir la dependencia o memoria temporal existente en un ruido. De igual modo, mediante el análisis R/S y la posterior estimación del exponente de Hurst se puede contrastar si una serie se comporta efectivamente como un ruido blanco o si por el contrario éste se encuentra correlacionado, lo que permite la posibilidad de que dicho ruido coloreado haya sido generado por un sistema caótico determinista -ruido caótico- de baja dimensión. Así, en general, podemos encontrarnos ante tres tipos de ruidos generadores de movimientos brownianos según sea el Exponente de Hurst (*H*):

- ***RUIDO BLANCO***: ***$H=0.5$*** (Ruido sin correlación temporal o ruidos independientes en el tiempo)
- ***RUIDO NEGRO***: ***$0.5<H<1$*** (Ruido con correlación temporal positiva o ruido con persistencia temporal)
- ***RUIDO ROSA*** : ***$0<H<0.5$*** (Ruido con correlación temporal negativa o ruido con antipersistencia temporal).

La existencia de ruidos distintos al blanco implica que los cambios o desplazamientos de un proceso estocástico $x(t)$ que sigue un movimiento browniano fraccionario pueden presentar cierta *memoria* respecto al pasado. Los valores del factor de escala *H*, muestran cual es el carácter de dicha memoria o tendencia respecto al pasado:

- ***$0<H<0.5$*** Comportamiento dinámico antipersistente o ergódico -ruido rosa-, en el cual *se espera que* la dirección de cambio corriente o actual *no siga en* el futuro (implica una mayor volatilidad que un paseo aleatorio). En el límite, si $H=0$, la serie temporal debe cambiar su dirección en cada iteración.

- ***H=0.5*** Movimiento incorrelacionado en el tiempo -ruido blanco-.
- ***0.5<H<1*** Comportamiento persistente o reforzador de tendencia -ruido negro-, en el cual se puede esperar, con certidumbre creciente a medida que el valor se aproxima a 1, que sea cual sea la dirección del cambio en la variable (tendencia puntual), ésta continuará en el futuro (implica menor volatilidad que un paseo aleatorio). Por ejemplo, una linea recta tendrá un exponente $H=1$.

El análisis R/S trata de estimar cual es el rango estandarizado de variación para distintos intervalos de tiempo de una serie temporal, y como decíamos anteriormente, permite estimar el exponente de Hurst asociado a la serie temporal considerando que esta es el ruido asociado a un movimiento browniano fraccional. Este análisis se compone de las siguientes etapas:

(i) Dada una serie temporal $\{x_t\}$ estacionria en media de tamaño N, dividimos el periodo temporal N, en A subperiodos contiguos de tamaño p de forma que:

$$A \cdot p = N$$

identificando a cada submuestra de tamaño p, como I_a, con $a=1...A$ y a sus elementos como $N_{k,a} \in I_a$, con $a=1...A$, $k=1,..,p$.

(ii) Calculamos el valor medio para cada bloque I_a:

$$e_a = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(N_{k,a}\right)$$

(iii) Construimos una nueva serie temporal a partir de la distancia acumulada a la media para cada bloque I_a, es decir :

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^{k}\left(N_{i,a} - e_a\right) \ ; k = 1,\dots,p$$

(iv) Se define el *Rango* como la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la serie $X_{k,a}$ para cada bloque I_a:

$$R_{I_a} = \max\left(X_{k,a}\right) - \min\left(X_{k,a}\right); \ 1 \leq k \leq p$$

(v) Se reescala (estandariza) el rango por la desviación típica muestral, calculada para cada bloque I_a :

$$\frac{R_{I_a}}{S_{I_a}}; \ con \ S_{I_a} = \left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(N_{k,a} - e_a\right)^2\right)^{1/2}$$

(vi) De esta forma obtenemos A rangos normalizados (R/S), cuyo valor medio para un tamaño p será:

$$(R/S)_p = \frac{1}{A}\sum_{a=1}^{A}\left(\frac{R_{I_a}}{S_{I_a}}\right)$$

Como apuntamos anteriormente, a partir de este rango estandarizado puede estimarse el exponente de Hurst asociado a la serie temporal. Para ello se hace uso de la relación entre el R/S y el exponente de Hurst que vendrá dada por la siguiente ley de potencia o de escala (Mandelbrot 1997, pp. 355):

$$(R/S)_p \propto p^H$$

Con el propósito de obtener una estimación robusta del exponente de Hurst se repiten las etapas *i)* a *vi)* para distintos valores del entero p (por conveniencia $10 \leq p \leq N/2$). De esta forma se tendrá un $(R/S)_p$ para cada p, y la estimación del exponente de Hurst puede obtenerse a partir de la regresión logarítmica por mínimos cuadrados ordinarios de la ley de la anterior escala:

$$\log(R/S) = \log(c_o) + H\log(p) + u_t$$

donde c_o es una constante a estimar y u_t es el término de error de la regresión.

La estimación del exponente de Hurst asociado a la serie temporal, nos indicará si ésta se comporta como un ruido blanco, rosa o negro según los valores que tome, es decir, nos indicará la existencia o no de cierta memoria o correlación en la serie. Cabe, sin embargo, cuestionarse la significatividad de los valores estimados del exponente de Hurst a partir del análisis R/S. En particular, cabría preguntarse si la serie original x_t es efectivamente un ruido blanco ($\hat{H} = 0.5$), cuestión ésta que resultará especialmente relevante para el análisis de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a la serie temporal.

En definitiva, estamos interesados en realizar el siguiente contraste de hipótesis a partir del análisis R/S efectuado sobre una serie temporal:

H_0: El proceso es aleatorio e independiente *IID* Normal(0, σ^2) (Ruido Blanco Gausiano)
H_1: El proceso no está incorrelacionado (Ruido Gausiano persistente o antipersistente)

Para realizar este contraste se construye la serie de valores R/S esperados bajo la hipótesis nula de ruido blanco gausiano (Anis y Lloyd, 1976):

$$E(R/S_p) = \frac{p - 1/2}{p}\left(\frac{p\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{p-1}\left(\frac{p-r}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Con esta nueva serie, siguiendo los pasos *(i)* a *(vi)* y para los mismos valores del entero p que fueron utilizados con la serie temporal original, se estimará $E[\hat{H}]$ -valor esperado para el exponente de Hurst bajo la hipótesis nula de ruido blanco gausiano-, cuya varianza vendrá dada por:

$$Var(E(\hat{H}))= 1/N$$

Así, podemos utilizar estos dos momentos estimados para el exponente de Hurst, para contrastar la hipótesis nula de ruido blanco gausiano utilizando el siguiente estadístico para el contraste de significación:

$$\frac{\hat{H} - E(\hat{H})}{1/\sqrt{N}} \_ N(0,1)$$

El análisis R/S y el ciclo medio del ruido.

Hasta ahora hemos visto como el análisis R/S puede ser utilizado para estimar la memoria o correlación presente en una serie temporal. Este método permite también estimar cuál es el ciclo medio de la serie y cual es su duración media, definida ésta como el periodo a partir del cual la serie pierde la memoria, aunque permanezca el impacto o dependencia de la serie respecto a todo el pasado. El razonamiento en que se sustenta la determinación del ciclo a partir del análisis R/S es que cuando la serie haya cubierto un ciclo entero su rango debe dejar de crecer, ya que entonces este rango ha debido alcanzar su máxima amplitud -rango máximo- y por eso a partir del tamaño medio del ciclo la magnitud $\log(R/S)_p$ debe perder toda memoria respecto al pasado y crecer a una tasa ~0.5 (R.B.). Es decir, debe observarse una ruptura en su representación gráfica en aquel p para el cual se alcanza el periodo medio del ciclo.

Esta determinación del ciclo medio a partir del análisis R/S es consistente incluso cuando la serie presentan ciclos inmersos en otros ciclos de periodo mayor. En este caso la gráfica $\log(R/S)_p$ presentará una ruptura en cada periodo del ciclo para seguir creciendo hasta que alcance el periodo del ciclo de periodo mayor.

Para contrastar la existencia de ciclos en una serie temporal y para estimar su periodo medio puede ayudar la construcción del denominado estadístico-V:

$$V_p = \frac{(R/S\ )_p}{\sqrt{p}}$$

Los valores que tome este estadístico a medida que aumenta p, estarán vinculados, de nuevo, al valor estimado del exponente de Hurst, ya que:

- Si H=0.5, $(R/S)_p$ aumentará con $\sqrt{p}$, y entonces V_p permanecerá más o menos constante.
- Si H>0.5, $(R/S)_p$ crecerá a una tasa mayor que $\sqrt{p}$ y, por tanto, V_p aumentará con p.
- Si H<0.5, $(R/S)_p$ crecerá a una tasa menor que $\sqrt{p}$ por lo que V_p será decreciente.

El análisis R/S como test de No-linealidad

El análisis R/S y el exponente de Hurst pueden utilizarse como un instrumento complementario al correlograma y el periodograma para captar cualquier tipo de dependencia lineal o no lineal así como la existencia de comportamientos cíclicos medios -memoria- en la dinámica subyacente a una serie temporal. En relación con este análisis R/S se ha introducido ya el test de Anis-Lloyd (1976) para contrastar la hipótesis de que el proceso sigue una distribución del tipo camino aleatorio gausiano, es decir, que constituye una sucesión de variables idéntica e independientemente distribuidas $N(0, \sigma)$. Como ya comentamos, el análisis R/S y el test Anis-Lloyd puede ayudar en la detección del caos determinista en la medida de que permiten confirmar la presencia de ruidos distintos al blanco -ruido rosa persistente o ruido negro antipersistente-, y con ello la posibilidad de que la serie temporal haya sido generada por procesos caóticos donde la persistencia o antipersistencia de la serie vendrá dada por la dinámica determinista subyacente. Recordemos, sin embargo, que los sistemas en régimen caótico no son los únicos capaces de generar ruidos coloreados. Los procesos puramente estocásticos -lineales y no lineales- también pueden generan ruidos distintos al blanco cuando éstos están correlacionados en el tiempo. Es por ello que el análisis R/S y la estimación del exponente de Hurst no constituye en sí un test directo para contrastar la existencia de comportamiento caótico, aunque sí permite rechazar la hipótesis de comportamiento aleatorio del tipo ruido blanco.

El análisis R/S y el test de Anis-Lloyd pueden considerarse, por tanto, como un test para contrastar la existencia de IID en el mismo sentido que el test BDS -con la diferencia de que aquí se impone adicionalmente la hipótesis de Normalidad-. Para ello, deberán utilizarse filtros lineales generales del tipo ARMA con los que intentar *pre-blanquear* la serie. Posteriormente, la aplicación del test de Anis-Lloyd sobre los residuos de dichos filtros lineales se utilizará, de manera análoga al test BDS, para tratar de contrastar si con este tipo de filtros se está recogiendo toda la estructura o dependencia temporal presente en la serie, o si por el contrario queda parte de dicha estructura temporal sin explicar, en cuyo caso deberá ser de carácter no-lineal. En conclusión, si mediante la aplicación de un filtro ARMA las series no presentan comportamientos significativamente distintos al ruido blanco deberemos rechazar la hipótesis de comportamiento caótico en la serie original, esto es, deberemos aceptar que la persistencia o antipersistencia de la serie viene explicada por un proceso lineal y por tanto no caótico.